Concursul Fractal, Secțiunea Seniori
I-a Ediție din 10.11.2024

Problema 1. În triunghiul ABC, fie M mijlocul laturii BC, iar M_B și M_C, mijloacele laturilor AC și AB respectiv. Fie $P_B \neq C$ intersecția cercurilor circumscrise triunghiurilor MM_BC și ABC, P_C se definește analog. Arătați că: $m(\angle P_BMM_B) - m(\angle P_CMM_C) = m(\angle ABC) - m(\angle ACB)$.

Problema 2. Un pachet este format din 13 tipuri de cărți: $T > K > D > J > 10 > 9 > \cdots > 3 > 2$, fiecare carte repetându-se de 4 ori. În total, sunt 52 de cărți.

Marius și Alexandru primesc fiecare câte jumătate din pachetul standard de cărți, punându-le pe toate cu fața în jos. La fiecare mutare, jucătorii scot simultan cartea cea mai de sus din mâna lor, iar jucătorul care are cartea cea mai valoroasă le ia pe amândouă și le pune sub toate cărțile sale, Marius decizând ordinea în care cele două cărți sunt puse. În caz de egalitate, fiecare își retrage propria carte, la fel, sub restul cărților. Jocul se termină când unul dintre jucători rămâne fără cărți.
Este oare posibil ca deși Alexandru are inițial toate cele patru cărți de T, jocul să dureze veșnic?

Problema 3. Găsiți toate funcțiile $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, care satisfac următoarele 2 condiții:

$$\begin{cases} \text{Dacă } f(0) = 0, \text{ atunci } f(x) \neq 0 \text{ pentru orice } x \text{ nenul.} \\ \\ f(x+y)f(y+z)f(z+x) = f(x+y+z)f(xy+yz+zx) - f(x)f(y)f(z) \ \forall x, y, z \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Problema 4. Fie $P(x)$ un polinom cu coeficienți naturali. Notăm cu $d(n)$ numărul de divizori pozitivi ai numărului natural n și cu $\sigma(n)$, suma acestor divizori. Secvența a_n e definită în felul următor:

$$a_{n+1} \in \begin{cases} \sigma(P(d(a_n))) \\ d(P(\sigma(a_n))) \end{cases}$$

Adică a_{n+1} este unul din cei doi termeni de mai sus. Arătați că există o constantă C, care depinde de a_1 și $P(x)$ astfel încât pentru orice i, $a_i < C$, cu alte cuvinte, arătați că secvența a_n este mărginită.

Concursul durează 4 ore (240 de minute)
Fiecare problemă valorează câte 7 puncte